EPITA

Mathématiques

Examen S2-B4-EV

Espaces vectoriels

durée : 2 heures

Mai 2026

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :

Le barème est sur 30 points. La note sera ramenée à une note sur 20 par règle de 3.

Consignes :

- Lire le sujet en entier avant de commencer. **Il y a en tout 5 exercices.**
- **Sauf mention contraire, toutes vos réponses doivent être justifiées soigneusement ! La rigueur de votre rédaction sera prise en compte dans la note.**
- Un malus d'un point sur la note sur 20 sera appliqué aux copies manquant de propreté.
- Documents et calculatrices interdits.
- Aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée, sauf pour les dessins.

Exercice 1 : sev ou pas (4 points)

Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ?

1. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y = 0 \text{ et } y - z^2 = 0\}$.

2. $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \exists\,(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha \times 2^n + \beta \times 3^n\}$.

Exercice 2 : bases ou pas (4 points)

On se place dans $\mathbb{R}^3$. On considère les familles suivantes :

$$\mathcal{F}_1 = (u_1 = (1,-1,2), u_2 = (1,-2,1), u_3 = (-1,3,0)) \text{ et } \mathcal{F}_2 = (v_1 = (1,1,1), v_2 = (2,2,1), v_3 = (2,3,2))$$

$\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont-elles des bases de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 3 : coordonnées (6 points)

1. On se place dans $E = \mathbb{R}_2[X]$. On considère la base $\mathcal{B} = \left(P_1 = 1 - X, P_2 = 1 + X, P_3 = (1 + X)^2\right)$ de E.

   (a) Soit $P \in E$ dont les coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont $(1, 2, -1)$. Trouver les coordonnées de P dans la base canonique de E.

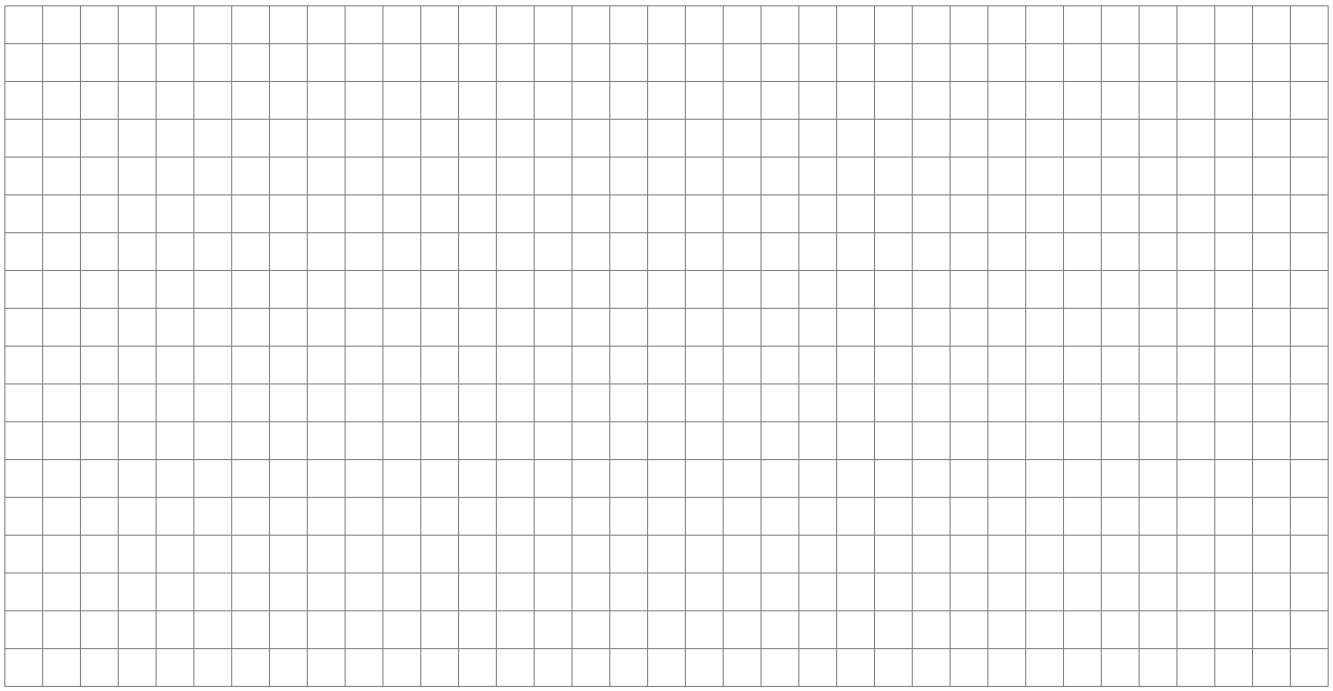
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....

   (b) Soit $Q = 2X^2 + 1$. Donner les coordonnées de Q d'une part dans la base canonique de E, d'autre part, dans $\mathcal{B}$.

   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....

2. Dans $E = \mathbb{R}^2$, on considère la base $\mathcal{B} = (u_1 = (3, 2), u_2 = (-1, 2))$.

   (a) Ci-dessous, dessiner les deux repères (avec 2 carreaux = 1 unité) formés d'une part, par la base canonique de $\mathbb{R}^2$, d'autre part, par $\mathcal{B}$. Soit $u = (-5, 2)$. Trouver graphiquement les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$. **Vous ferez apparaitre vos traits de construction.**

   Graphiquement, les coordonnées de u dans $\mathcal{B}$ sont : .....

   (b) Vérifier par le calcul ce que vous avez trouvé dans la question précédente.

   .....

Exercice 4 : sev engendrés (6 points)

Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on considère les sous-espaces vectoriels :

$$F = \text{Vect}(X^2 + X) \text{ et } G = \text{Vect}(X^2, X)$$

1. Donner un vecteur appartenant à F et un vecteur n'appartenant pas à F. Ne pas justifier.

2. Donner un vecteur appartenant à G et un vecteur n'appartenant pas à G. Ne pas justifier.

3. A-t-on $F \subset G$? $G \subset F$?

4. Trouver la dimension de F et la dimension de G.

Exercice 5 : sev supplémentaires ? (10 points)

On se place dans $E = \mathbb{R}^3$. On considère les deux sous-espaces vectoriels suivants :

- F est le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $u_1 = (1, 2, -1)$ et $u_2 = (-2, -4, 2)$.
- $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x + y = 0\}$.

1. Trouver rigoureusement une base de F. En déduire la dimension de F.

2. Trouver rigoureusement une base de G. En déduire la dimension de G.

3. Montrer que $F \cap G = \{0_E\}$.

4. Rappeler la définition de $F \oplus G = E$. Est-ce le cas ici ?

5. Proposer F' sous-espace vectoriel de E tel que $F' \cap G \neq \{0_E\}$ mais $F' + G = E$. Vous préciserez ce que représente géométriquement F'. Inutile de justifier votre choix.

6. Proposer H sous-espace vectoriel de E tel que $H \cap F = \{0_E\}$ mais $H + F \neq E$. Vous préciserez ce que représente géométriquement H. Inutile de justifier votre choix.